

# 低レイノルズ数領域で静止液体中を沈降する 単一球粒子に及ぼす壁面効果

中村貴彦\*・藤川智紀\*

(平成 25 年 5 月 23 日受付/平成 25 年 9 月 10 日受理)

**要約**：土粒子の粒度分析法である比重計法とピペット法は、ともにストークス抵抗則を用いて粒径を決定している。ストークス抵抗則は、透水性のない剛体球粒子であること、粒子レイノルズ数がおよそ 1 以下の層流であること、壁面効果がないこと、が成立条件である。しかしながら実際の測定では明らかにこれら条件は満たされていない。そこで本研究の目的は、ガラスビーズとグリセリンを用いた低レイノルズ数流れ下において、数種の実験を行い、単一球に及ぼす壁面効果を定量化することである。その結果、(1) 壁面から離れた位置を沈降する場合、単一平面の壁面効果は既往の研究結果に一致するものの、壁面付近ではそれよりも大きくなる傾向にあること、(2) 角柱管と円筒管を使用して行った 1 平面と 1 曲面からの壁面距離が沈降速度に及ぼす影響には、平面と曲面とで明確な相違が見られないこと、(3) 角柱管内での壁面効果は管壁に近いほど大きくなり、角柱の角部で最大となり、最小は中央部ではなく中央より少し離れたところにあること、(4) 円筒管の曲率の増加にともなって壁面効果は大きくなること、が明らかとなった。

**キーワード**：ストークス抵抗則，沈降速度，壁面効果，低レイノルズ数

## はじめに

土粒子の粒度分析法には一般に JIS (日本工業規格) や SSSA (アメリカ土壤学会) 等で規定されている比重計法と、国際的に広く用いられているピペット法がある<sup>1)</sup>。比重計法では経過時間毎に土壤懸濁液の密度を比重浮秤で測定し、比重浮秤が沈降した距離と時間から沈降速度を求め、ストークス抵抗則を適用した沈降速度式から粒径を算出する。同時に懸濁液密度から粒子の通過質量を計算し、粒径加積曲線を作成し、粒度や均等係数など土壤の粒径に関する性質を明らかにする。一方、ピペット法では、土壤懸濁液からピペットを用いて砂—シルト及びシルト—粘土の境界の粒径粒子が沈降する時間をあらかじめストークス抵抗則を適用して算出しておき、その時間経過後にピペットで懸濁液を吸い取り、直接秤量することでそれらの粒子の構成割合を算定し、粒度を明らかにしている。

これら 2 法は、完全に分散した土壤懸濁液において土粒子を沈降させ、ストークス抵抗則を適用して粒子の粒径を求めるという点で共通している。ストークス抵抗則は粘性流体の運動方程式であるナビエ・ストークス方程式から導かれるもので、そのための条件は、

- ①透水性のない剛体球粒子であること、
- ②粒子レイノルズ数がおよそ 1 以下の層流であること、
- ③周囲に他の粒子や容器壁面などなく、単一粒子として沈降している、つまり壁面効果がないこと、である<sup>2)</sup>。

実際の粒度分析において、これらのうち条件①に関して、

土粒子がすべて球状であるかどうかは不明である。条件②に関して、沈降速度の測定開始に先立ち懸濁状態を均一にするための攪拌を行うことで液中は乱流となっていて、静水状態となるまでにどれだけの時間を要するかは様々な条件によって異なる。条件③に関して、比重計法では 1L の懸濁液中に約 65g の土壤が、ピペット法では 500mL に 10g の土壤が懸濁しており、さらに懸濁液は容器内に存在している。これらのことからストークス抵抗則を満たすために必要な 3 条件は明らかに満たされていない。にもかかわらずこれまで、この法則を用いて粒径が求められてきた。

単一球粒子の沈降速度に影響する壁面効果に関する理論的研究は、後述する HAPPEL と BRENNER<sup>3)</sup> が詳細なレビューを行っている。また中村らは、0.3×3mm および 0.5×5mm 断面 (高さはそれぞれ 50mm および 100mm) をもつ角型ガラスセル内の水中において沈降する、標準粒径 20 $\mu$ m ラテックス粒子の沈降速度測定を行い<sup>4)</sup>、その結果を HAPPEL と BRENNER<sup>3)</sup> の成書に掲載された 1923 年に FAXEN が彼の学位論文の中で導いた式 (後述する(3)式) を用いて、沈降速度測定装置の信頼性の検討を行った。その中では壁面に近いほど粒子の沈降速度は遅くなるという傾向は確認されたが、壁面効果について詳細な検討はなされなかった。また 2000 年代に入って、低レイノルズ数領域の単一粒子の沈降時の壁面効果を取り扱った研究論文は見当たらないようである。

そこで本研究ではこれまで得られたデータと新しく得られた測定値をもとに、静止流体中を沈降する単一剛体球に

\* 東京農業大学地域環境科学部生産環境工学科

及ぼす壁面効果について実験的に明らかにすることを目的とした。

## 方 法

沈降速度の測定は 65 mm × 65 mm の矩形断面をもつアクリル製角柱沈降管(高さ 400 mm), および内径 28 mm (高さ 230 mm), 36 mm (同 250 mm), 49 mm (同 340 mm), 65 mm (同 400 mm), 83 mm (同 460 mm) の 5 種類のガラス製円筒沈降管を使用して行った。室温を 20 ± 2°C に保った恒温室内で, 20 ± 2°C の恒温水槽内に, グリセリン(関東化学, 特級, 純度 99%) を満たした沈降管を置き, 標準粒径 5 mm のガラスビーズをピンセットを使用して沈降させた。ガラスビーズは沈降させる直前に個々の質量をマイクロ天秤(島津理化, AUW220D)で, 直径をマイクロノギスで測定しておいた。解析において直径は無作為に選んだ 5 軸の算術平均径を採用した。沈降速度は, 終末速度に達した位置にある任意の距離の標線間を自由沈降するのに要する時間を, ストップウォッチで測定して算出した。なお, 本測定では, ガラスビーズの沈降開始後, 速やかに終末速度に達している。そこで, 沈降管の底面からの影響がないと考えられる中央の高さ付近で沈降時間を測定した。具体的にはそれぞれの結果の章で述べる。なお, 無作為に抽出したガラスビーズ 100 個の直径と質量の平均値(標準偏差)は 4.82 mm (0.09 mm) および 0.1610 g (0.0011 g) であった。また, 定期的にグリセリンの温度を測定し, それにもとづき密度および粘性係数の値を使用した。グリセリンの密度および粘性係数の温度依存性は公表されている値<sup>5)</sup>を用いて, 測定時の液温に相当する値を補間して求めた。たとえば, 20.0°C の密度および粘性係数の値はそれぞれ, 1.261 × 10<sup>3</sup> kg m<sup>-3</sup>, 1.70 Pas とした。

ストークスの法則を適用した場合, 密度  $\rho_L$ , 粘性係数  $\mu$  の流体中を終末速度  $U_0$  で沈降する, 密度  $\rho_p$ , 直径  $d$  の単一剛体球粒子に作用する球粒子に作用する力のつり合いは,

$$\frac{\pi}{6}d^3(\rho_p - \rho_L)g = 3\pi d\mu U_0 \quad (1)$$

である。左辺が重力および浮力, 右辺が粘性によるストークス抵抗を表している。本研究で用いたガラスビーズは直径  $d \approx 5$  mm, 密度  $\rho_p \approx 2.6 \times 10^3$  kg m<sup>-3</sup> の球粒子であり, その終末沈降速度は概算で  $U_0 = 26$  mms<sup>-1</sup> となり, このとき粒子レイノルズ数はおよそ 0.2 であり, ストークス抵抗則が適用できる低レイノルズ数域での沈降である。

沈降中の管軸に平行な壁面からの距離は, ガラスビーズを落とす位置での壁面からの距離とした。壁面による影響が存在すると, 粒子に作用する抵抗  $f$  は, HAPPEL と BRENNER<sup>3)</sup> の解析に従い,

$$f = \frac{1}{\alpha} \times 3\pi d\mu U_0 \quad (2)$$

と表され<sup>3)</sup>, ここで  $1/\alpha$  は壁面効果によるストークス抵抗の補正值(無次元)である。 $\alpha$  は粒子の直径  $d$ , すなわち半径  $d/2$  に対する粒子と壁面との間の距離  $L$  の比  $(d/2)/L$  の関数と考えられており,  $\alpha < 1$  である。抵抗  $f$  は  $1/\alpha$  の増加

とともに増加し, 沈降速度  $U$  はストークスの沈降速度  $U_0$  の  $\alpha$  倍へと変化する。

本研究では, 粒子の半径  $d/2$  を壁面からの距離  $L$  または  $R$  で除して無次元化した壁面距離  $(d/2)/L$  または  $(d/2)/R$  (図 1), ストークス抵抗則を適用して理論的に得られる終末沈降速度  $U_0$  により無次元化した沈降速度  $U/U_0$  を用いて検討を進めた。沈降位置が壁面から遠ざかるほど, 無次元化した壁面距離  $(d/2)/L$  または  $(d/2)/R$  は小さい値となるが, これは多くの既往の研究に従い, そのまま使用した。

静止液体中における単一剛体球粒子が沈降する(図 1)際の, 壁面の状態には様々な場合が想定されるが, 本研究では,

- ① 1 平面からの影響,
- ② 1 平面と湾曲面での影響の相違,
- ③ 角柱管内での影響の相違,
- ④ 円筒管内での曲率の影響,

のそれぞれを明らかにするための実験を行った。

## 結果および考察

### (1) 1 平面からの影響

FAXEN は 1 つの平らな壁面に沿って単一粒子が沈降する場合の流れにおいて, 粒子が受ける抵抗について理論的な解析を行い, 壁面の影響によるストークス抵抗の補正值  $1/\alpha$  における  $\alpha$  を次のように導いた<sup>3)</sup>。

$$\alpha = 1 - \left(\frac{9}{16}\right)\left(\frac{a}{L}\right) + \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{a}{L}\right)^3 - \left(\frac{45}{256}\right)\left(\frac{a}{L}\right) - \left(\frac{1}{16}\right)\left(\frac{a}{L}\right)^5 \quad (3)$$

中村らがラテックス粒子について測定した沈降速度と壁面からの距離の関係<sup>4)</sup>を用いて, ストークスの沈降速度により無次元化した沈降速度と無次元化した壁面距離との関係として再整理したものを図 2 に示した。図 2 は横軸に無

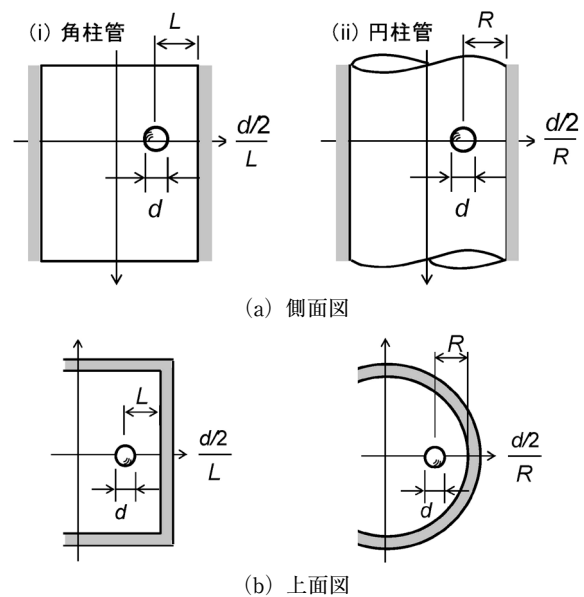


図 1 角柱管と円筒管内での粒子の沈降

次元化した壁面距離  $(d/2)/L$ 、縦軸に無次元化した沈降速度  $U/U_0$  をプロットしている。図の実線が  $F_{AXEN}$  の式を表す。300 $\mu$ セル (図中の□) および 500 $\mu$ セル (図中の△) はそれぞれ、中村らが行った 0.3×3mm および 0.5×5mm 断面をもつガラスセル内において、水中を沈降する標準粒径 20 $\mu$ m のラテックス粒子の値である。この結果より、沈降距離  $a/L$  が 0.2 以下、つまり壁面から遠い位置であれば  $F_{AXEN}$  の式に近い値を示し、0.2 をこえるとばらつきが大きくなることが明らかとなった。壁面に近い位置を沈降する場合、ばらつきが大きくなる原因は明確にされていないが、壁面近傍で撮影された粒子の映像が不鮮明であることが多く、沈降位置測定の問題やガラス沈降管壁の表面粗さなどが影響し、壁面近傍での位置測定の誤差がばらつきに影響しているのではないかと考えた。

そこで本研究では、これらの誤差を小さくするために目視で測定できる、粘性の大きい液体中でのガラスビーズの沈降について測定した。沈降速度の測定は角柱管の中央を境に 100mm 間で行った。沈降速度測定の終了地点から底面までの距離は約 150mm であった。使用した角柱管は 65mm の正方形断面をもつものであり、側壁面からの距離に比べて底面からの距離の方が大きく、底面からの効果は無視することにした。

その結果は図 1 中の○で示す通りである。各測定位置につき 5 個のガラスビーズを使用した。個々の粒子の粒径と質量にはばらつきが存在するので、実測値をそのままプロットした。沈降距離  $(d/2)/L$  が小さいとき、つまり壁面

から遠い位置を沈降するとき、沈降速度は  $F_{AXEN}$  の値に一致し、 $(d/2)/L=0.3$  付近を境に、壁面に近付くほど沈降速度は減少するものの、つまり壁面による影響は大きくなるものの、その値は  $F_{AXEN}$  の値よりも大きいことが明らかとなった。しかしながらその理由については明らかにならなかった。

本節では単一平面の影響として考えたが、実際には容器の中での測定であるので、他の 3 面の影響が考えられる。本研究では対象とする 1 平面に直角に接続する 2 平面とは、等距離 ( $(d/2)/L=0.077$ ) の位置での測定である。この壁面距離を単一平面と考えて沈降速度を求めると  $U/U_0=0.9$  であり、単独の単一平面よりも壁面効果は 1 割程度大きくなると考えられる。このことからすると、中村らが測定した粒子<sup>4)</sup> は他の 2 平面から粒子までの距離は等しいとは限らず、このこともばらつきに影響しているものと考えた。

(2) 1 平面と湾曲面での壁面からの影響の相違

前節で述べた通り角柱管での 1 平面からの影響は、平面との距離の関数として壁面効果の式は表されている。しかし実際には最近接点以外にも壁面は存在しており、その状況が変化すれば壁面効果も変化すること、あるいは同じ壁面距離だとしても、平面と曲面では異なることが予想される。一方、比重計法とピペット法ではともに円筒管を用いて沈降速度を測定することとなっている。円筒管の場合には(1)式は適用できないことから、円筒管の湾曲面から受ける壁面効果について、定量化のための検討を行った。測定には角柱管は前節と同じ 65×65×400mm のもので、円筒管は内径 65mm、高さ 400mm のものを使用した。測定位置は角柱管では前節(1)と同じであり、円筒管は底面から 114mm 上方の 59.0mm の距離での沈降とした。

その結果は図 3 に示す通りである。これも前節と同様、各壁面距離につき 5 個のガラスビーズを使用し、それぞれの結果をプロットした。角柱管、円筒管それぞれの断面の図心を通る水平軸上での沈降速度の分布を表しており、壁面距離  $(d/2)/L=(d/2)/R=0.32$  より遠い位置に壁面が存在する。その結果には沈降速度と壁面距離との関係には、

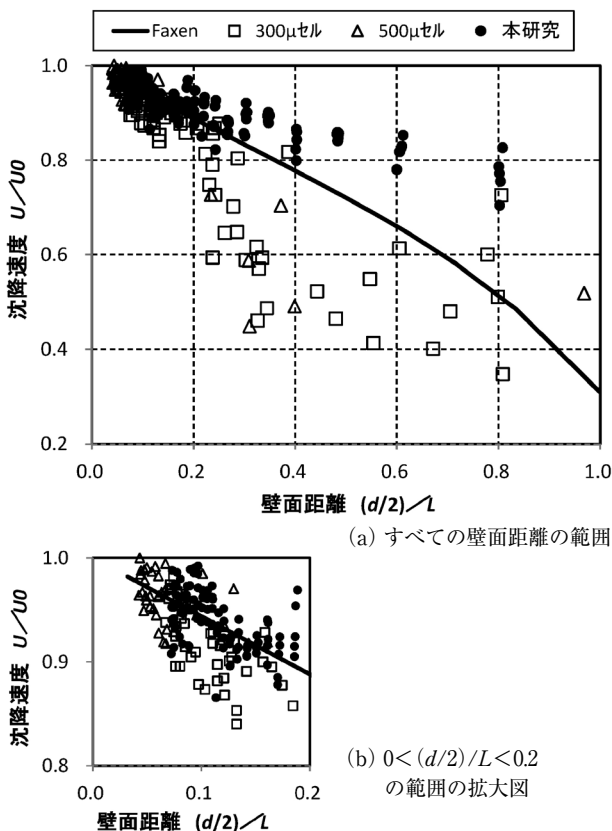


図 2 1 平面による壁面距離が沈降速度へ及ぼすの影響

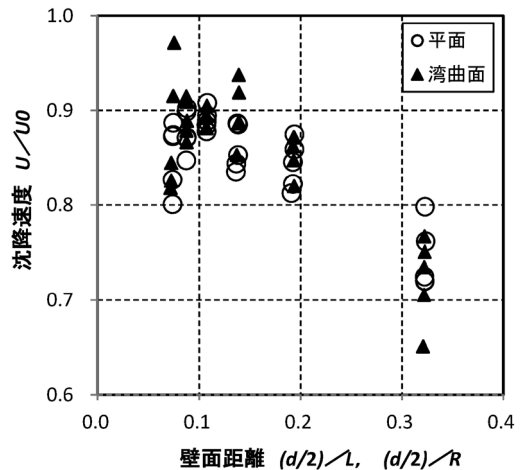


図 3 単一平面と曲面の壁面効果の相違

壁面に近づくほど沈降速度は小さくなる傾向は確認できたが、同じ壁面距離であっても大きなばらつきが存在することが明らかとなった。統計処理は行っていおらず、平面と曲面の相違を明確にすることができなかった。

(3) 角柱管内での影響の相違

これまでの結果は1平面からの影響を見てきたが、実際には角柱管あるいは円筒管の中であり他の面が存在している。ある1平面に接近していれば、その面の影響が強くなるが、その面から遠ざかれば、他の面の影響が現れることが予想される。そこで角柱管内において図4に示す1/8に区切った直角三角形内での沈降速度と壁面距離の関係を測定し、複数の面からの壁面効果の分布について検討を行った。

その結果は図5に示す通りである。図の左上が壁面距離  $(d/2)/L$  が小さい、つまり正方形断面の中央部で、右下が角柱管の角部を表している。図中格子内の値が測定粒子5個の平均の沈降速度を、括弧内は標準偏差を表している。粒子の粒径や密度にばらつきが存在しているおり、それらの沈降速度を平均することについて議論のあるところではあるが、その結果、中央部 ( $(d/2)/L=0.07, U/U_0=0.852$ ) よりも、少しはずれた位置で最大の沈降速度を示し ( $(d/2)/L=0.11, U/U_0=0.940$ )、壁面に近づくほど影響は大きくなり、2壁面に最接近する点で最大の影響を受けることが明らかとなった。

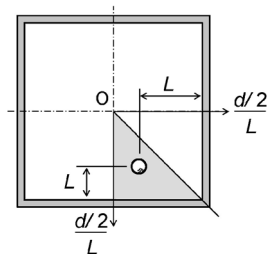


図4 角柱管内での沈降速度分布の測定

壁面距離 $(d/2)/L$	0.07	0.09	0.11	0.14	0.19	0.32
0.07	0.852 (0.037)					
0.09	0.878 (0.023)	0.865 (0.035)				
0.11	0.891 (0.011)	0.874 (0.032)	0.940 (0.033)			
0.14	0.860 (0.024)	0.862 (0.029)	0.865 (0.041)	0.853 (0.029)		
0.19	0.843 (0.026)	0.855 (0.014)	0.829 (0.043)	0.847 (0.020)	0.814 (0.057)	
0.32	0.745 (0.034)	0.771 (0.054)	0.739 (0.051)	0.699 (0.046)	0.7261 (0.042)	0.621 (0.031)

図5 角柱管内での沈降速度  $U/U_0$  の値の分布

図1で示した1平面の場合のFAXENの壁面効果は、壁面距離の増加とともに単調に減少する。しかしながら本研究では図5に示すように、角柱管内部での壁面効果は管の中央部ではなく、 $(d/2)/L=0.1$ 付近で最小となることが明らかとなったが、その理由については明らかにできなかった。

(4) 円筒管の湾曲面の曲率の影響

管内の中央部を沈降する場合、角柱管では多様な距離の壁面から影響を受けていることが考えられる。これに対し円筒管では等距離にある湾曲面からの影響を受ける。そこで湾曲面の曲率を変化させる(図6)ことによって同じ沈降距離だとしても、最近接面以外の面との距離が異なる異なる場合の壁面効果について検討を行った。

沈降速度の測定は内径28mm(高さ230mm)、36mm(同250mm)、49mm(同340mm)、65mm(同400mm)、83mm(同460mm)の5種類のガラス製円筒沈降管を使用して行った。それぞれの円筒管の曲率は半径の逆数であり、 $0.071, 0.053, 0.041, 0.031, 0.024 \text{ mm}^{-1}$ である。沈降位置は14mmで一定とした。沈降速度の測定距離はそれぞれ、32.5, 37.6, 51.3, 59.0, 73.5mmであり、沈降速度測定終了時の底面からの高さはそれぞれ47, 74, 153, 114, 226mmであった。なお測定の経過にしたがって底面に粒子が溜まっていくため、そのことも合わせて今後、底面からの壁面効果について検討していく必要があるものとする。

粒径5mmのガラスビーズが壁面から14mmの位置を

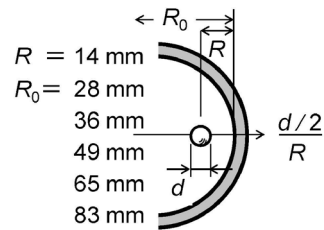


図6 円筒管の半径  $(R_0)$  および曲率  $(1/R_0)$  の違いによる壁面効果の測定

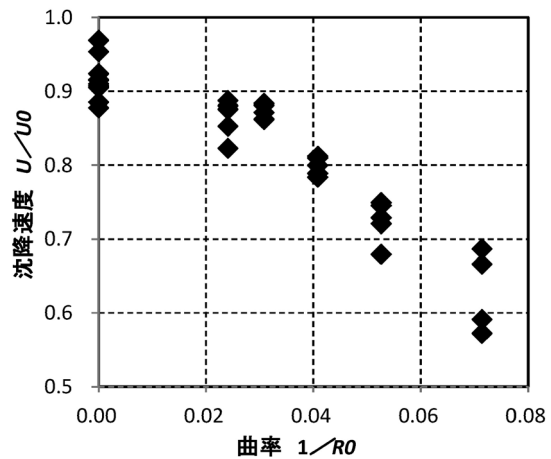


図7 曲率の増加による壁面効果

沈降するとき壁面距離  $(d/2)/L = (d/2)/R = 0.18$  となる。この条件下での沈降管の曲率が沈降速度に及ぼす影響の測定結果は図7に示す通りである。横軸は円筒管の曲率を表している。曲率0は平面を表しているものとして、図2に示した角柱管の値を記載した。曲率0.071は内径28mmの円筒管の中央部である。各沈降管につき5個の粒子を使用し、すべての測定値を図7にプロットした。ばらつきはあるものの曲率の増加にともなって沈降速度は小さくなる傾向が明らかとなった。今後、測定値を増やすとともに統計的に明確な関係を明らかにしたい。

## おわりに

ガラスビーズとグリセリンを用いた低レイノルズ数条件下において、単一剛体球に及ぼす壁面効果を実験的に定量化した。その結果次のことが明らかとなった。

(1) 壁面から離れた位置を沈降する場合、単一平面の壁面効果は既往の研究結果に一致するものの、無次元化された壁面距離  $(d/2)/L = 0.3$  付近を境に、壁面付近では壁面の影響がより小さく測定された。

(2) 角柱管と円筒管を使用して行った1平面と1曲面からの壁面距離が沈降速度に及ぼす影響には、平面と曲面とで明確な相違を見いだせなかった。

(3) 角柱管内での壁面効果は管壁に近いほど大きくなり、角柱の角部で最大となり、最小は中央部ではなく中央より少し離れたところにあった。

(4) 円筒管の曲率の増加にともなって壁面効果は大きくなった。

土粒子の粒度分析法である比重計法やピペット法においては、多数の粒子の沈降を考える必要がある。壁面のみならず他の粒子の影響も現れる。本研究で示したように微粒子の沈降速度に及ぼす壁面効果が小さくないことを考えると、これまで測定されてきた土壌の粒度は、沈降速度を過大評価したために、より大きく見積もられてきた可能性がある。

謝辞：実験の遂行にあたり生産環境工学科農地環境工学研究室の学生諸君にご協力を得ました。ここに記して感謝いたします。

## 引用文献

- 1) 農業土木学会 (1983) “粒度分析” 土の理工学性実験ガイド. 農業土木学会, 東京, pp.13-17.
- 2) 本間 仁・安芸皎一編 (1962) “球のまわりの流れ” 物部水理学. 岩波書店, 東京, pp.458-459.
- 3) HAPPEL J and BRENNER H (1983) Low Reynolds Number Hydrodynamics, Martinus Nijhoff Publishers, Hague.
- 4) 中村貴彦, 足立泰久, 鈴木光剛 (1997) 微粒子の沈降速度測定装置の開発およびそれを適用したアオコの単一細胞の沈降速度の決定. 農業土木学会論文集. 187: pp.31-36.
- 5) 日本化学会編 (1993) 化学便覧 基礎編Ⅱ. 丸善, 東京.
- 6) 中村貴彦 (1997) 単一球粒子沈降時の壁面効果. 農業土木学会全国大会講演会講演要旨集. pp.120-121.

# Wall Effect on a Single Sphere Sinking in a Static Liquid at Low Reynolds Number Range

By

Takahiko NAKAMURA\* and Tomonori FUJIKAWA\*

(Received May 23, 2013/Accepted September 10, 2013)

**Summary** : Soil particle size distribution has been decided on the basis of the Stokes' law by either the hydrometer method or the pipette method. The Stokes' law is applicable for particles of impermeable hard sphere with laminar flow being less than 1 of particle Reynolds number without any wall effects. However, the actual experimental process of soil particle size distribution does not meet the above necessary conditions for the Stokes' law. So the objective of this study is to discuss quantitatively wall effect on spherical glass beads settling in glycerol. The results of the experiments were summarized as follows. (1) Although single wall effect far from wall was similar to that reported in former studies, the observed one near wall was higher than that reported. (2) There seemed to be no clear difference between a plane wall effect and a curved wall effect from measurement of settling velocities by using a rectangular cylinder and a circular cylinder. (3) There was a tendency for wall effect to be larger in the position near wall and to be smaller at around center in rectangular cylinder. (4) Wall effect tended to increase with curvature.

**Key words** : Stokes' law, settling velocity, wall effect, low Reynolds number

---

\*Department of Bioproduction and Environment Engineering, Faculty of Regional Environment Science, Tokyo University of Agriculture